E.N.S.E.T. DURÉE : 4 heures **Option B**

PREMIÈRE COMPOSITION

Le problème propose le calcul de quelques fonctions définies par des intégrales impropres. Certaines questions suggérant des intégrations par parties, on rappelle que la formule classique d'intégration par parties ne s'applique pas directement aux intégrales impropres et, qu'en conséquence, des passages à la limite s'imposent.

On demande la plus grande rigueur dans les raisonnements notamment ceux concernant les convergences d'intégrales impropres et ceux concernant les intégrations par parties. Tous les théorèmes utilisés devront être énoncés de façon précise.

PARTIE I

On considère l'équation différentielle (E)

$$y'' - 4y = a|x| + b$$

où a et b sont deux réels donnés $(a \neq 0)$.

1° *a.* Déterminer l'expression de la solution générale de (E) dans chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

b. Déterminer toutes les fonctions continues sur **R** qui sont solutions de (E) dans chacun des deux intervalles précédents.

c. Déterminer toutes les fonctions continûment dérivables dans **R** qui sont solutions de (E) dans chacun des deux intervalles précédents.

d. Déterminer l'expression de la solution générale Y de l'équation (E) dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

2° Existe-t-il des solutions de (E) dans **R** qui sont trois fois continûment dérivable dans **R** ?

3° *a.* Trouver un équivalent au voisinage de $+\infty$ pour la fonction Y solution générale de (E).

b. Trouver de même un équivalent de cette fonction Y au voisinage de $-\infty$.

c. En déduire qu'il existe une seule solution Y_0 de (E) sur **R** dont le graphe admet deux branches infinies ayant des droites pour asymptotes. Déterminer cette solution et les droites asymptotes. Dessiner également le graphe de cette solution Y_0 en discutant suivant les valeurs de a et de b le nombre des solutions de l'équation $Y_0(x) = 0$.

d. Montrer que cette fonction Y_0 est aussi la seule solution de (E) sur **R** dont la dérivée d'ordre deux tend vers zéro au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

PARTIE II

x étant un réel arbitraire, on considère l'intégrale impropre :

$$K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}\, dt \ .$$

1° Montrer que $K : x \rightsquigarrow K(x)$ définit une application de **R** dans **R**. Montrer que cette fonction K est paire.

2° Calculer pour $x > 0$, la valeur de $K(x)$ en utilisant le nombre $K(1)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. En déduire une expression de $K(x)$ valable sur $]-\infty, +\infty[$.

PARTIE III

On étudie la fonction F définie par l'intégrale impropre :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)\, dt}{t^2(1+t^2)} \ .$$

On se propose de montrer que F est solution d'une équation différentielle (E) (Partie I) pour des valeurs convenables de a et de b.

1° Montrer que F est une application de **R** dans **R**. Prouver l'inégalité :

$$| F(x) - K(x) | \leqslant \frac{\pi}{2} .$$

En déduire un équivalent au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) de $F(x)$.

2° *a.* x et h étant deux réels arbitraires, montrer l'inégalité :

$$|\sin^2[t(x+h)] - \sin^2(tx) - t\,h\sin(2tx)| \leqslant h^2 t^2 .$$

b. Montrer que, pour tout x réel, l'intégrale impropre définie par

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2tx)}{t(1+t^2)}\,dt$$

est convergente.

c. En étudiant la quantité :

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right|$$

où x est fixé et où h tend vers zéro, montrer que F est dérivable dans **R** et que la fonction dérivée de F est la fonction G.

d. Montrer que G est continue sur **R**.

3° *a.* Montrer, en utilisant une intégration par parties et deux passages à la limite que :

$$2xG(x) = + \int_0^{+\infty} (1 - \cos 2tx) \frac{1+3t^2}{t^2(1+t^2)^2}\,dt$$

d'où

$$xG(x) = + \int_0^{+\infty} \sin^2 tx \; \frac{1+3t^2}{t^2(1+t^2)^2}\,dt .$$

b. Montrer, en utilisant par exemple la même méthode que dans la question III. 2° que la fonction $x \rightsquigarrow xG(x)$ est dérivable dans **R**. Quelle est la dérivée de cette fonction?

c. Montrer que, pour tout $x \neq 0$, la fonction G est dérivable et que la dérivée G′ s'exprime au moyen de deux intégrales impropres.

d. En utilisant à nouveau une intégration par parties, montrer que la dérivée $G'(x)$ s'exprime par :

$$G'(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{1+t^2}\,dt \qquad \forall x \neq 0$$

4° *a.* Montrer que, pour tout x réel non nul, la quantité $F(x) - K(x)$ s'exprime simplement à l'aide de $F'(x)$. En déduire que, sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, la fonction F est solution d'une équation différentielle (E) pour des valeurs de a et de b que l'on précisera.

b. Déduire des résultats de la première partie et des propriétés des fonctions $F(x)$ et $F'(x)$ des expressions de ces deux fonctions, valables quel que soit x, utilisant deux constantes et le nombre $K(1)$. Donner de même une expression de $F''(x)$ pour $x \neq 0$.

c. En utilisant notamment le résultat de la question (III, 1°) déterminer $F(x)$ et $F'(x)$ au moyen de fonctions élémentaires simples et du nombre $K(1)$. Déterminer le nombre $K(1)$.

E.N.S.E.T. Durée : 4 heures Option B

DEUXIEME COMPOSITION

On se place dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^2$. $\mathbf{R}^{2*}$ désigne cet espace privé de l'origine. $\mathcal{A}$ est une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même; sa matrice dans une base (e_1, e_2) orthonormée, sauf mention du contraire, se note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Le norme d'un vecteur u se note $\| u \|$.

I

1° Caractériser, par des conditions sur les coefficients de A, les matrices A_m telles que

$$\| A_m(u) \| = m \| u \| \qquad \forall u \in \mathbf{R}^{2*}$$

(m est un réel positif : $m \in \mathbf{R}_+^*$)

Pourquoi peut-on se borner à considérer des vecteurs unitaires ?

2° Donner une représentation paramétrique de ces matrices, en exprimant a, b, c, d en fonction de m et d'un paramètre réel. Trouver des sous-ensembles $I \subset \mathbf{R}_+^*$ tels que $\bigcup_{m \in I} \{ A_m \}$ soit un groupe (la loi de composition étant la multiplication des matrices).

3° Pour une matrice A quelconque, $\dfrac{\| A(u) \|}{\| u \|}$ dépend en général de la direction. Montrer que cette quantité est [illegible] pour deux sous-espaces vectoriels que l'on déterminera.

4° Calculer en fonction de a, b, c, d le maximum et le minimum de $\dfrac{\| A(u) \|}{\| u \|}$.

Applications numériques

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II

On s'intéresse désormais aux applications $\mathcal{A}$ qui jouissent de la propriété suivante, que l'on désignera dans la suite par « propriété P » : il existe au moins un vecteur non nul qui a même norme que son transformé.

5° A étant supposée diagonalisable, on désigne ses valeurs propres (réelles) par s_1 et s_2.

Montrer que la condition

$$s_1^2 \leqslant 1 \leqslant s_2^2$$

implique P.

6° On désigne par τ et δ la trace (somme des termes diagonaux) et le déterminant de A. Les exprimer en fonction de s_1 et s_2.

Déterminer le domaine du plan (τ, δ) où la condition considérée au 5° est satisfaite.

7° Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique associée à une matrice symétrique A soit définie positive est que son déterminant et ses termes diagonaux soient positifs.

En déduire que la proposition P équivaut à $\det(A^T A - I) \leqslant 0$ (A^T est la transposée de A, I la matrice identité).

Retrouver ce résultat comme conséquence de la question 4°. En déduire le résultat de la question 6°.

8° On considère l'application f de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Df désignant la différentielle de l'application f, autrement dit l'opérateur dont la matrice est la matrice des dérivées partielles de f, déterminer le lieu des points où Df a la propriété (P).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail